SULLA QUADRATURA

DI UNA CERTA SUPERFICIE

DI OTTAVO ORDINE

NOTA

DI BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime nell'Università Romana
Uno dei Quaranta della Società Italiana
delle Scienze.

ESTRATTA DAGLI ANNALI DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE
PUBBLICATI IN ROMA
DECEMBRE 1852

ROMA
Tipografia delle Belle Arti
1852

NOTA

SOPRA L' INTEGRALE DEFINITO DUPLICATO CHE SERVE A RAPPRESENTARE LA QUADRATURA DI UNA CERTA SUPERFICIE DI OTTAVO ORDINE, E NELLA QUALE L'ESPRESSIONE ANALITICA DEL SUO VOLUME COINCIDE CON UNA SUPERFICIE ELLISSOIDICA. (*)

1.° Nelle applicazioni geometriche del calcolo integrale, ho avuto più volte occasione di considerare i differenti integrali definiti, che possono rappresentare la quadratura di un' ellissoide. È noto che *Legendre* nel principio delle sue ricerche su questo soggetto ridusse la questione allo svolgimento dell' integrale definito della forma irrazionale

$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\varphi \sqrt{(b^2c^2\cos^2\theta+a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi+a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

ove per l'ellissoide si ha l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

e per gli angoli φ, θ

$$x=a\cos\theta\,,\ y=b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,,\ z=c\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi.$$

Legendre dimostra che l' espressione irrazionale per una convenevole trasformazione di variabili può finalmente ridursi alle funzioni ellittiche di prima, e seconda specie. In appresso i geometri hanno dimostrato in differenti maniere l' elegante risultato trovato da Legendre, ed in particolare *Jacobi* ha fatto vedere, che l'espressione irrazionale per la quadratura dell'el-

(*) Questa nota fa parte di altro scritto presentato all'Accademia de' Nuovi Lincei fin dal 2 Giugno 1850.

lissoide può essere sostituita da un'altra, che gode il vantaggio di essere razionale, e nella quale l'integrazione si eseguisce in un modo puramente elementare. Un geometra di Dublino il *Sig. William Roberts* in un'articolo indirizzatomi fin dal 31 gennajo 1849, e pubblicato da me nella *Raccolta scientifica*, per lo stesso anno mi fa osservare, che si arriva immediatamente all' espressione razionale ottenuta da *Jacobi* per l' area ellissoidica, quando si voglia calcolare in coordinate polari il volume terminato dalla superficie di ottavo ordine

$$(x^2 + y^2 + z^2)^4 = 9(b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2)$$

in modo che l'espressioni analitiche dell'area dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e del volume terminato dalla detta superficie di ottavo ordine sono coincidenti. Questa relazione rimarcabile fra le due superficie, una di secondo, e l'altra di ottavo ordine mi spinse a cercare, qual sia l'integrale definito duplicato rappresentante la quadratura della nuova superficie; e se possa ridursi come per il suo volume alle funzioni ellittiche.

2.° Il problema sullo spianamento delle superficie curve è in generale più arduo del problema sulle cubature. Nel nostro caso facendo uso delle coordinate polari, la quadratura della nuova superficie viene espressa da un' integrale definito composto di due irrazionalità una di secondo, e l'altra di terzo, e non può ridursi alle funzioni ellittiche. Quando sia $b = c$, allora si ottiene un'immediata riduzione ad un'integrale definito semplice, non riducibile alle funzioni ellittiche, e si può in esso solamente far svanire la doppia irrazionalità col far restare soltanto quella del secondo ordine.

Poniamo adunque

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi, \quad z = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi$$

l'equazione polare della nuova superficie di ottavo ordine sarà

$$r^6 = 9(b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi)$$

La formola delle quadrature in coordinate polari è

$$S = \iint r\, d\theta\, d\varphi \sqrt{\left(r_{,}^2 + (r'^2 + r'^2)\operatorname{sen}^2\theta\right)}$$

ove r', $r_{,}$ sono le derivate parziali della r relativamente agli angoli θ, φ, ed avremo

$$r' = \frac{3(a^2c^2\cos^2\varphi + a^2b^2\operatorname{sen}^2\varphi - b^2c^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^5}$$

$$r_{,} = \frac{3(a^2b^2 - a^2c^2)\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{r^5}$$

d'onde sostituendo, e facendo per brevità

$$u = \cos\theta\,, \quad v = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,. \quad w = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$$

$$R = b^2c^2u^2 + a^2c^2v^2 + a^2b^2w^2$$

verrà

$$S = 3\iint \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi \frac{\sqrt{(b^4c^4u^2 + a^4c^4v^2 + a^4b^4w^2 + 8R^2)}}{r^4}$$

I limiti dell'integrale per l'ottava parte della superficie sono

$$\theta = 0\,, \quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad \varphi = 0\,, \quad \varphi = \tfrac{1}{2}\pi$$

quindi richiamando che

$$r^2 = \sqrt[3]{9(b^2c^2u^2 + a^2c^2v^2 + a^2b^2w^2)}$$

otterremo per l'intera superficie

$$S = \frac{8}{\sqrt[3]{3}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi \sqrt{(b^4c^4u^2 + a^4c^4v^2 + a^4b^4w^2 + 8R^2)}}{\sqrt[3]{(b^2c^2u^2 + a^2c^2v^2 + a^2b^2w^2)^2}}$$

Questo è l'integrale definito duplicato, che rappresenta la quadratura della nuova superficie: il volume terminato dalla me-

desima viene espresso da un'area ellissoidica di semiassi a, b, c. Una prima integrazione relativamente alla variabile θ, è di forma trascendente, e non mi pare possibile la riduzione ad un'integrale definito semplice.

3.° Se si supponga $b = c$, l'integrazione relativamente a φ si eseguisce immediatamente, mentre $v^2 + w^2 = 1$, ed otteniamo per la nuova sostituzione di $u = \cos\theta$

$$S = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \frac{\sqrt{(b^8\cos^2\theta + a^4 b^4 \operatorname{sen}^2\theta + 8R^2)}}{\sqrt[4]{(b^4\cos^2\theta + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta)^2}} .$$

In questo nuovo integrale definito la doppia irrazionalità si potrà ridurre a quella di secondo ordine solamente, ed il valore di R diviene

$$R = b^4 \cos^2\theta + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta .$$

e l'equazione algebrica della superficie sarà

$$(x^2 + y^2 + z^2)^4 = 9\left(b^4 x^2 + a^2b^2(y^2 + z^2)\right) .$$

Per renderla omogenea sostituiamo a^3, b^3 invece di a^2, b^2, e mutiamo quindi a in b e b in a, la medesima equazione diviene

$$(x^2 + y^2 + z^2)^4 = 9a^3\left(a^3 x^2 + b^3(y^2 + z^2)\right)$$

d'onde l'espressione S della sua quadratura porge

$$S = \frac{4\pi a}{\sqrt[3]{3}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \frac{\sqrt{\left(a^6 - (a^6 - b^6)\operatorname{sen}^2\theta + 8\rho^2\right)}}{\sqrt[3]{\left(a^3 - (a^3 - b^3)\operatorname{sen}^2\theta^2\right)^2}}$$

ove

$$\rho = a^3 - (a^3 - b^3)\operatorname{sen}^2\theta.$$

Si toglie la doppia irrazionalità col fare

$$\rho = a^3 - (a^3 - b^3)\operatorname{sen}^2 \theta = z^3 ,$$

allora ai limiti $0 = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = 0$ corrisponderà $z = b$, $z = a$, d' onde sostituendo gli indicati valori , e rovesciando i limiti con un cangiamento di segno, sarà per il medesimo integrale

$$S = \frac{6\pi a}{\sqrt[3]{3}\sqrt{(a^3 - b^3)}} \int_b^a \frac{dz \sqrt{\left(8z^6 + (a^3 + b^3)z^3 - a^3 b^3\right)}}{\sqrt{(z^3 - b^3)}} .$$

Questo nuovo integrale definito non è riducibile alle funzioni ellittiche. Quando infine fosse $a = b = c$, la superficie di ottavo ordine si riduce ad una sfera di equazioue

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \sqrt[3]{9} ,$$

ed il penultimo valore di S porgerà evidentemente la cognita espressione della superficie sferica.